Akmaral Utelbayeva, Doctor of chemical Sciences, associate Professor of the Department of Chemistry M. Auezov South Kazakhstan University Kazakhstan, Shymkent, mako_01-777@mail.ru
Khasen Abshenov,Candidate of technical Sciences, Head of Department M. Auezov SKU

DOI 10.47649/vau.2020.v59.i4.18
МРНТИ 27.23.17
УДК517.927.2

Е.С.Жақатай[1], Н. К. Шаждекеева[1], А.Б.Раисов[1]

[1]Х.Досмұхамедов атындағыАтырау университеті
Атырау қ., Қазақстан Республикасы
j.y.s.96@mail.ru

ГРАФТАҒЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІ ЖҮЙЕ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПКЕ ТҮРЛЕНДІРУ

Әр түрлі қолданбаларда кездесетін дифференциалдық теңдеулерді графтардағы теңдеулер ретінде түсіндіруге болады. Мұндай теңдеулер теориясының кең ауқымды қолданылуы мүмкін, графтың қасиеттерін осындай теңдеулер мен оларды шешудің әдістерінің сапалы теориясын құру үшін қолдануға болады деп айтуға толық негіз бар. Графтардың қарапайым қасиеттерін пайдала отырып, дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің әрекетін зерттеуге болады.

Алғашқы графтық модель химияда қолданылған. Графтардағы дифференциалдық операторлар теориясының дамуы жақында, осы саладағы зерттеулердің көпшілігі соңғы екі онжылдықта жүргізілді. Графтардағы дифференциалдық операторлар химия, физика және техникада (нанотехнология) пайда болды және олар математикалық жағынан қызықты. Графтардағы дифференциалдық операторлардың қолданулары арасында химиядағы конъюгацияланған молекулалардың еркін электронды теориясы, кванттық сымдар мен кванттық хаос, шашырау теориясы мен фотондық кристалдар бар.

Графтарда көптеген функциялар кеңістігі анықталады. Осы функциялар кеңістігі мен дифференциалдық жүйелер арқылы графтарда шеттік есептер анықтаймыз.Бұл жұмыста графтағы шеттік есепті дифференциалдық жүйе үшін шеттік есепке түрлендіруді қарастырамыз. Ол үшін графтың әрбір қырын (0, 1) интервалына түрлендіріп, графтағы дифференциалдық теңдеуді қайта анықтадық. Одан кейін шекаралық шарттарды да интервалға сәйкес түрлендіріп, бастапқы шеттік есеп пен жаңадан алынған шеттік есеп арасында байланыс орнаттық.

Негізгі сөздер: граф, дифференциалдық теңдеу, шеттік есеп, дифференциалдық оператор, өз-өзіне түйіндес оператор, меншікті мән.

Кіріспе

G қырларының ұзындығы ақырлы және олардың саны ақырлы K болатын граф болсын. Қырларды e_i, $i=1,...,K$ және олардың ұзындықтарын сәйкесінше l_i, $i=1,...,K$ деп белгілейік. G графында екінші ретті дифференциалдық оператор қарастырамыз:

$$ly := -\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)\,y = \lambda y, \qquad (1)$$

мұндағы $q(x)$ (алдағы уақытта да) G -да анықталған нақты функция.

Атап айтқанда (1) теңдеу арқылы біз келесі теңдеулер жүйесін айтамыз:

$$ly := -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + q_i(x) y_i = \lambda y_i, \; x \in (0, l_i), \; i = 1, ..., K ,$$

мұнда q_i және y_i деп q мен y функцияларының e_i -ге сәйкес бөлігін белгіледік, ал $e_i = (0, l_i)$.

Келесі түрдегі шекаралық шарттарды қарастырамыз:

$$\sum_{j=1}^{K} \left[\alpha_{ij} y_j + \beta_{ij} y_j' \right](0) + \sum_{j=1}^{K} \left[\gamma_{ij} y_j + \delta_{ij} y_j' \right](l_j) = 0, \; i = 1, ..., 2K ,$$

мұнда сызықтық тәуелсіз шекаралық шарттар саны $2K$ -ға тең. Шекаралық шарттардың саны $2K$ болуы G -да шеттік есептің өз-өзіне түйіндес болуы үшін қажет (бірақ жеткілікті емес).

Жүйе құрылымы

G графындағы (1) дифференциалдық теңдеуін

$$-\frac{d^2 y_i}{dx^2} + q_i(x) y_i = \lambda y_i, \qquad x \in (0, l_i), \; i = 1, ..., K , \tag{2}$$

жүйесі түрінде қарастыруға болады, мұндағы $q_i = q\big|_{e_i}$, $y_i = y\big|_{e_i}$.

v төбесіндегі шекаралық шарттар осы төбеге енетін және шығатын қырлардағы y және y' шамаларының мәндері арқылы беріледі. Егер басы v төбесі болатын қырларды $e_i, i \in \Lambda_s(v)$ және ұшы v төбесі болатын қырларды $e_i, i \in \Lambda_e(v)$ деп белгілесек, онда v төбесіндегі шекаралық шарттар келесі түрде өрнектеледі:

$$\sum_{j \in \Lambda_s(v)} \left[\alpha_{ij} y_j + \beta_{ij} y_j' \right](0) + \sum_{j \in \Lambda_e(v)} \left[\gamma_{ij} y_j + \delta_{ij} y_j' \right](l_j) = 0, \; i = 1, ..., N(v), \tag{3}$$

мұндағы $N(v)$ - v төбесіндегі сызықтық тәуелсіз шекаралық шарттар саны.

$i = 1, ..., N(v)$ мен $j \notin \Lambda_s(v)$ үшін $\alpha_{ij} = 0 = \beta_{ij}$ және сол сияқты $i = 1, ..., N(v)$ мен $j \notin \Lambda_e(v)$ үшін $\gamma_{ij} = 0 = \delta_{ij}$ болсын. Онда (3) шекаралық шарттарды барлық төбелер үшін келесі түрде жазуға болады:

$$\sum_{j=1}^{K} \left[\alpha_{ij} y_j + \beta_{ij} y_j' \right](0) + \sum_{j=1}^{K} \left[\alpha_{ij} y_j + \beta_{ij} y_j' \right](l_j) = 0, \qquad i = 1, ..., 2K , \tag{4}$$

мұндағы $2K$ - барлық сызықтық тәуелсіз шекаралық шарттардың саны. G графының толық геометриясы (қырларының саны мен ұзындықтарынан басқа) шекаралық шарттарда қамтылған.

Өз-өзіне түйіндес жағдай орын алу үшін (3) шартты қанағаттандыратын барлық $f,g\in C^2(G)$ үшін $(lf,g)-(f,lg)$ Лагранж тұрпаты нөлге айналуын талап етеміз. Өз-өзіне түйіндес шекаралық шарттар үшін $N(v)=\#(\Lambda_s(v))+\#(\Lambda_e(v))$ және $\sum_v N(v)=2K$. Графтардағы өз-өзіне түйіндес есептердің қойылымы [10]-да қарастырылған және өз-өзіне түйіндес шекаралық шарттардың класы [11] пен [12]-де сипатталған.

G графындағы (2)-(3) шеттік есебін анықталу облысы

$$D(L)=\{f\,|\,f,f'\in AC, Lf\in L^2(G), (2.4)\text{ шартын қанағаттандырады}\} \tag{5}$$

немесе бұған эквивалент

$$D(L)=\{f\,|\,f\in H^2(G),(3)\text{ шартын қанағаттандырады}\}$$

болатын тұйық әрі тығыз анықталған

$$Lf:=-f''+qf \tag{6}$$

операторы үшін $L^2(G)$кеңістігіндегі оператордың меншікті мәнін табу есебі ретінде қарастыруға болады.[9, 29-32 б.]

(2)-(3) есептің өз-өзіне түйіндес болуы L операторының $L^2(G)$ кеңістігінде тұйық әрі тығыз анықталған өз-өзіне түйіндес оператор болуын қамтамасыз етеді. [13, 77-78 б.]

Графтағы шеттік есепті $(0,1)$ интервалында жүйе үшін шеттік есеп ретінде қарастыруға болатынын көрсетейік.

Ұзындығы l_i болатын e_i қырын қарастырайық:

$$-y_i''(x)+q_i(x)y_i(x)=\lambda y_i(x), \qquad x\in(0,l_i)$$

$t=\dfrac{x}{l_i}$ және $\tilde{y}_i(t)=y_i(l_it)$ болсын. Онда

$$-\frac{d^2}{dt^2}\left[\tilde{y}_i(t)\right]=-l_i^2y_i''(l_it)=l_i^2\left(\lambda y_i(l_it)-q_i(l_it)y_i(l_it)\right)=$$
$$=l_i^2\left(\lambda-Q_i(t)\right)\tilde{y}_i(t)$$

мұндағы $Q_i(t)=q_i(l_it)$.

Осылайша әрбір $i=1,...,K$ үшін біздің түрлендірген теңдеуіміз мына түрде болады:

$$-\tilde{y}_i''+l_i^2(Q_i-\lambda)\tilde{y}_i=0, \qquad t\in(0,1)$$

Алынған теңдеулерді келесі жүйе ретінде жазамыз:

$$\tilde{L}\tilde{Y}:=-W\tilde{Y}''+Q\tilde{Y}=\lambda\tilde{Y} \tag{7}$$

мұндағы $W = diag\left[\frac{1}{l_1^2},...,\frac{1}{l_K^2}\right], \tilde{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_K \end{bmatrix}$ және $Q = diag\left[Q_1,...,Q_K\right]$.

Енді шекаралық шарттарды қарастырайық. Жоғарыдағы түрлендірулерден кейін барлық қырлардың ұзындықтары 1-ге тең болды және олардың шеткі нүктелері 0 мен 1 болды. Демек шекаралық шарттарды матрицалық түрде жазуға болады:

$$\tilde{A}\tilde{Y}(0) + \tilde{B}\tilde{Y}'(0) + \tilde{C}\tilde{Y}(1) + \tilde{D}\tilde{Y}'(1) = 0 \tag{8}$$

мұндағы $\tilde{A} = \left[\alpha_{ij}\right], \tilde{B} = \left[\frac{\beta_{ij}}{l_j}\right], \tilde{C} = \left[\gamma_{ij}\right], \tilde{D} = \left[\frac{\delta_{ij}}{l_j}\right]$.

Осылайша G графындағы шеттік есеп (7) дифференциалдық теңдеу мен (8) шекаралық шарттар арқылы жүйе түріндегі шеттік есепке эквивалент болды.

Өлшемді L^2 векторлық кеңістігін L_K^2 арқылы белгілейік:

$$L_K^2 = \left\{F:(0,1)\to C^K \middle| F_i \in L^2(0,1), i=1,...,K\right\}$$

Ал скаляр көбейтінді келесі түрде болады:

$$\left\langle F,G\right\rangle_W = \sum_{i=1}^{K} l_i \int_0^1 F_i\bar{G}_i dt = \int_0^1 F^T W^{-\frac{1}{2}} \bar{G} dt \tag{9}$$

L_K^2 кеңістігі $L^2(G)$ кеңістігіне изометриялы изоморфты болады. $L^2(G) \to L_K^2$ қатынасы келесі түрде анықталады:

$$f(x) \to \begin{bmatrix} f\big|_{e_1}(l_1 t) \\ \vdots \\ f\big|_{e_K}(l_K t) \end{bmatrix}$$

мұндағы $x \in G$ және $t \in (0,1)$.

(7)-(8) шеттік есебін оператордың меншікті мәнін табу есебі ретінде қарастыруға болады [14]:

$$\tilde{L}F = -WF'' + QF$$

$$D(\tilde{L}) = \{F | F, F' \in AC, \tilde{L}F \in L^2(G),\ \text{(2.9) қанағаттандырады}\}$$

Лемма. (7)-(8) есебі L_K^2 кеңістігінде өз-өзіне түйіндес болады сонда, тек сонда ғана егер (2)-(3) шеттік есебі L_K^2 кеңістігінде өз-өзіне түйіндес болса.

Дәлелдеу. $F,G \in C^2(0,1)$ және $F,G:(0,1) \to \square^K$ болсын және G графында f пен g функциялары $i=1,...,K$, $t \in (0,1)$ үшін $f|_{e_i}(l_i,t) = F_i(t)$ және $g|_{e_i}(l_i,t) = G_i(t)$ қатынастарымен анықталсын. Онда

$$\left\langle \tilde{L}F,G \right\rangle_W - \left\langle F,\tilde{L}G \right\rangle_W = -\sum_{i=1}^{K} l_i^{-1} \int_0^1 \left[F_i'' \bar{G}_i - F_i \bar{G}_i'' \right] dt =$$
$$= -\sum_{i=1}^{K} l_i^{-1} \left[F_i' \bar{G}_i - F_i \bar{G}_i \right]_0^1 =$$
$$= \sum_{i=1}^{K} \left[\left(f' \, \bar{g} - f \, \bar{g}' \right)\Big|_{e_i} \right]_0^{l_i} =$$
$$= (Lf,g) - (f,Lg)$$

Демек, (3) орындалады сонда, тек сонда ғана егер (8) орындалса. Лемма дәлелденді.

Бұл жағдайда (7)-(8) есебінің өз-өзіне түйіндес болуы $\tilde{L}$ операторының L_K^2 кеңістігінде тұйық әрі тығыз анықталған өз-өзіне түйіндес оператор болуын қамтамасыз етеді. Осылайша (2)-(3) есебінің өз-өзіне түйіндес болуы $\tilde{L}$ операторының L_K^2 кеңістігінде тұйық әрі тығыз анықталған өз-өзіне түйіндес оператор болуын қамтамасыз етеді. [13, 77-78 б.]

Қорытынды

Бұл жұмыста графтағы шеттік есепті дифференциалдық жүйе үшін берілген шеттік есеп ретінде көрсеттік. Бұл графтағы шеттік есепті графтағы дифференциалдық оператордың меншікті мәнін табу есебі ретінде қарастырып, оның спектрлік құрылымын зертеуге мүмкіндік береді

Әдебиеттер тізімі

1 Оре О. Теория графов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 336 с.

2 Берж К. Теория графов и ее применение. - М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 320 с.

3 Шаждекеева Н.К., Айғабыл М., Батырханов А.Г. Графтар теориясындағы есептердің дифференциалдау әдісі// IV Международная научно-практическая конференция «Европа и тюркский мир: наука, техника и технологии» //г. Стамбуле (Турция) 1-3 мая 2019 г. 283 стр

4 Шамишева А.С., Шаждекеева Н.Қ. Дифференциалдық теңдеулердің графтар арқылы кескіні // Білім – ғылым - қоғам: Өзараықпалдастық мәселелері мен перспективалары атты Халықаралық ғылыми-практикалық конференциясының материалдары, 1-бөлім. – 2013 ж. – 531-534 б.

5 Шамишева А.С., Шаждекеева Н.Қ. Графтарды дифференциалдау // «Бектаев оқулары-1: ақпараттандыру – қоғам дамуының болашағы» атты Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясының материалдары, 2-бөлім. – 2014 ж. – 335-340 б.

6 Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н. Самосопряженные сужения максимального оператора на графе. // Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 36-44.

7 Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Приядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.:Физматлит. 2005. – 272 с.

8 Shazhdekeeva N.K., Zhakatay E.S. Statement of the boundary value problem on the graph// MNIZh – 2020. – № 2 (92). - p. 40-43

9 Sonja C. Spectral theory of differential operators on graphs. University of the Witwatersrand, South Africa, 2005. – 130 p.
10 Carlson R. Adjoint and self-adjoint differential operators on graphs, Electronic J. Differential Equations, 1998 (1998), No. 06, 1-10.
11 Harmer M. Hermitian symplectic geometry and extension theory, J. Phys. A: Math. Gen., 33 (2000), 9193-9203.
12 Kostrykin V., SchraderR., Kirchhoff's rule for quantum wires, J. Phys. A: Math. Gen., 32 (1999), 595 - 630.
13 Yoshida K. Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.
14 Weidmann J. Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer-Verlag, 1980.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ В КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ ДЛЯ СИСТЕМЫ

Дифференциальные уравнения, встречающиеся в разных приложениях, могут быть интерпретированы как уравнения в графах. Есть веские основания утверждать, что теория таких уравнений может применяться в широких масштабах, и свойства графа могут быть использованы для создания качественной теории таких уравнений и методов их решения. Используя простые свойства графов, мы можем изучить действие решений дифференциальных уравнений.

Первая графовая модель использовалась в химии. Развитие теории дифференциальных операторов в графах произошло в последнее время, большая часть исследований в этой области проводится в последние два десятилетия. Дифференциальные операторы в графах появились в химии, физике и технике (нанотехнологии) и представляют математический интерес. Приложения дифференциальных операторов в графах включают теорию свободных электронов сопряженных молекул в химии, квантовые проволоки и квантовый хаос, теорию рассеяния и фотонные кристаллы.

Многие функциональные пространства определены на графиках. Используя пространство этих функций и дифференциальных систем, мы определяем краевые задачи в графах.В данной статье мы рассматриваем преобразование краевой задачи на графе в краевую задачу для дифференциальной системы. Для этого мы преобразовали каждую грань графа в интервал (0, 1) и переопределили дифференциальное уравнение на графе. Затем мы изменили граничные условия в соответствии с интервалом и установили связь между исходной краевой задачей и вновь полученной краевой задачей.

Ключевые слова: граф, дифференциальное уравнение, краевая задача, дифференциальный оператор, самосопряженный оператор, собственное значение.

TRANSFORMATION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM ON A GRAPH INTO A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM

Differential equations found in different applications, can be interpreted as equations in graphs. There is good reason to argue that the theory of such equations can be applied on a large scale, and on the other hand, the properties of the graph can be used to create a qualitative theory of such equations and methods for solving them.

The first graph model was used in chemistry. The development of the theory of differential operators in graphs has occurred recently, most of the research in this area has been carried out in the last two decades. Differential operators in graphs appeared in chemistry, physics and engineering (nanotechnology) and are of mathematical interest. Applications of differential operators in graphs include the theory of free electrons of conjugated molecules in chemistry, quantum wires and quantum chaos, scattering theory, and photonic crystals.

Many function spaces are defined on graphs. Using these spaces of functions and differential systems, we define boundary value problems in graphs. In this article, we consider the transformation of a boundary value problem on a graph into a boundary value problem for a differential system.To do this, we have transformed each edge of the graph into the interval (0, 1) and redefined the differential equation on the graph. Then we changed the boundary conditions in accordance with the interval and established a connection between the original boundary value problem and the newly obtained boundary value problem.

Key words: graph, differential equation, boundary value problem, differential operator, self-adjoint operator, eigenvalue.

References

1 Ore O. Teorija grafov. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1980. – 336 s.

2 Berzh K. Teorija grafov i ee primenenie. - M.: Izd-vo inostr. lit., 1962. – 320 s.

3 Shazhdekeeva N.K., Ajғabyl M., Batyrhanov A.G. Graftar teorijasyndaғy esepterdiң differencialdau әdisi// IV Mezhdunarodnaja nauchno-prakticheskaja konferencija «Evropa i tjurkskij mir: nauka, tehnika i tehnologii» //g. Stambule (Turcija) 1-3 maja 2019 g. 283 str

4 Shamisheva A.S., Shazhdekeeva N.Қ. Differencialdyқ teңdeulerdiң graftar arқyly keskini // Bilim – ғylym - қoғam: Өzarauқpaldastyқ mәseleleri men perspektivalary atty Halyқaralyқ ғylymi-praktikalyқ konferencijasynyң materialdary, 1-bөlim. – 2013 zh. – 531-534 b.

5 Shamisheva A.S., Shazhdekeeva N.Қ. Graftardy differencialdau // «Bektaev oқulary-1: Aқparattandyru – Қoғam Damuynyң bolashaғy» atty Halyқaralyқ ғylymi-tәzhiribelik konferencijasynyң materialdary, 2-bөlim. – 2014 zh. – 335-340 b.

6 Zhapsarbaeva L.K., Kanguzhin B.E., Konyrkulzhaeva M.N. Samosoprjazhennye suzhenija maksimal'nogo operatora na grafe. // Ufimskij matematicheskij zhurnal. Tom 9. № 4 (2017). S. 36-44.

7 Pokornyj Ju.V., Penkin O.M., Prijadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravnenija na geometricheskih grafah. M.:Fizmatlit. 2005. – 272 s.

8 Shazhdekeeva N.K., Zhakatay E.S. Statement of the boundary value problem on the graph// MNIZh – 2020. – № 2 (92). - p. 40-43

9 Sonja C. Spectral theory of differential operators on graphs.University of the Witwatersrand, South Africa, 2005. – 130 p.

10 Carlson R. Adjoint and self-adjoint differential operators on graphs, Electronic J. Differential Equations, 1998 (1998), No. 06, 1-10.

11 Harmer M. Hermitiansymplectic geometry and extension theory, J. Phys. A: Math. Gen., 33 (2000), 9193-9203.

12 Kostrykin V., SchraderR., Kirchhoff's rule for quantum wires, J. Phys. A: Math. Gen., 32 (1999), 595 - 630.

13 Yoshida K. Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

14 Weidmann J. Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer-Verlag, 1980.

Information about authors:

Yerkebulan Zhakatay, 2nd year Magistracy student in speciality 7M05401-Mathematics and Computer sciences, Atyrau University named after Kh.Dosmukhamedov.060011, Atyrau, Kazakhstan, e-mail: j.y.s.96@mail.ru

Nurgul Shazhdekeeva, candidate of physical and mathematical sciences, head of a department. Atyrau University named after Kh.Dosmukhamedov.060011, Atyrau, Kazakhstan, e-mail:n.shazhdekeeva@asu.edu.kz

Adilet Raissov, 1st year Magistracy student in speciality 7M05401-Mathematics and Computer sciences, Atyrau University named after Kh.Dosmukhamedov.060011, Atyrau, Kazakhstan, e-mail: raissovadilet@gmail.ru